

# Probabilidad de la unión de sucesos

**FICHA**

Sucesos compatibles e incompatibles

## 1 Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

Supongamos el experimento de lanzar un dado. El espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (6 \text{ elementos})$$

es decir, todos los posibles resultados de lanzar un dado.

Estudiemos dos sucesos A y B:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{sacar un número menor que } 5\} & A &= \{1, 2, 3, 4\} \quad (4 \text{ elementos}) \\ B &= \{\text{sacar número par}\} & B &= \{2, 4, 6\} \quad (3 \text{ elementos}) \end{aligned}$$

Calcular la probabilidad de A y de B por separado es sencillo. Aplicando la Regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{6} = 0,6667 \quad \text{es decir, un } 67\%$$

$$P(B) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{6} = 0,5 \quad \text{es decir, un } 50\%$$

Pero, ¿cómo calcular la **probabilidad de un nuevo suceso C, que sea unión de los sucesos A y B**? La unión de los sucesos A y B equivaldría a definir un suceso “**sacar menor que 5 o sacar par**”. Especial atención a la “o” en la definición; estamos indicando que puede suceder uno u otro. La “o” corresponde con la operación de unión de conjuntos.

$$C = A \cup B$$

Existen dos formas de realizar el cálculo. Podemos realizar la operación de unión y entonces calcular la probabilidad del nuevo suceso resultante:

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad (5 \text{ elementos})$$

El nuevo conjunto contiene 5 elementos. Por lo tanto, 5 casos favorables de 6 casos posibles.

$$P(C) = P(A \cup B) = \frac{5}{6} = 0,833 \quad \text{es decir, un } 83\%$$

Por lo tanto, la probabilidad de “**sacar menor que 5 o par**” con un dado es del 83%.

¿Existe otra forma de realizar el cálculo? Sí. También podemos sumar probabilidades utilizando la siguiente fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De hecho, podríamos utilizar las probabilidades  $P(A)$  y  $P(B)$  ya calculadas para calcular la probabilidad de la unión de A y B. Pero, ¿por qué hacemos este restamos la probabilidad de la intersección? ¿por qué realizamos este “ajuste”?

En sencillo. Si volvemos a la definición de los sucesos A y B:

$$\begin{array}{ll} A = \{\text{sacar un número menor que 5}\} & A = \{1, 2, 3, 4\} \\ B = \{\text{sacar número par}\} & B = \{2, 4, 6\} \end{array}$$

Observamos que **los sucesos son compatibles**; hay elementos comunes, que al realizar la operación de unión de los sucesos hay que contar “una sola vez”, es decir, hay que eliminar del conjunto (una sola vez) los elementos que se repiten, que corresponden precisamente con la intersección de los sucesos A y B.

$$A \cap B = \{2, 4\} \quad (2 \text{ elementos})$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 0,3333 \quad \text{es decir, un 33\%}$$

Los elementos 2 y 4 aparecen como elementos comunes, porque para cada uno de ellos se cumple que “es menor que 5” y “es par”. Por ese motivo pertenecen a los dos conjuntos A y B. Aplicando la fórmula presentada anteriormente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

$$P(A \cup B) = 0,6667 + 0,5 - 0,333 = 0,833$$

que corresponde con el resultado del primer método para calcular la probabilidad.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad (5 \text{ elementos})$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6} = 0,833$$

Por lo tanto, cuando dos sucesos A y B son compatibles:

$$A \cap B \neq \emptyset$$

entonces, podemos aplicar la siguiente fórmula para calcular la **probabilidad de la unión de los sucesos**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## 2 Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

¿Y como se calcula la probabilidad de la unión de dos sucesos cuando son incompatibles? Es mucho más sencillo.

Pensemos en dos sucesos incompatibles:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{sacar par}\} & A &= \{2,4,6\} \\ B &= \{\text{sacar impar}\} & B &= \{1,3,5\} \end{aligned}$$

Calcular la probabilidad de A y de B por separado es sencillo. Aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{6} = 0,5 \quad \text{es decir, un 50\%}$$

$$P(B) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{6} = 0,5 \quad \text{es decir, un 50\%}$$

Los sucesos A y B son incompatibles porque la intersección de ambos sucesos no contiene ningún elemento. Con otras palabras, no hay elementos comunes.

$$A \cap B = \emptyset \quad (0 \text{ elementos})$$

Por lo tanto, la probabilidad de la intersección de A y B, aplicando la Regla de Laplace, será siempre 0 cuando los sucesos son incompatibles:

$$P(A \cap B) = \frac{0}{6} = 0 \quad \text{es decir, un 0\% de probabilidad}$$

Queremos calcular la probabilidad de un nuevo suceso C, que es resultado de la unión de los sucesos A y B. El nuevo suceso se podría definir como “sacar par o impar”, un suceso por el que valdría la pena apostar, puesto que si lanzamos un dado, seguro que el resultado es par o impar (es un suceso seguro).

Aplicando la fórmula anterior:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,5 + 0,5 - 0$$

$$P(A \cup B) = 1 \quad \text{es decir, un 100\% de probabilidad}$$

De hecho, la fórmula para calcular la probabilidad de la unión de sucesos cuando los sucesos son incompatibles, se reduce a la siguiente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

No hace falta restar la probabilidad de la intersección de los sucesos A y B, puesto que siempre será 0.